Séquence arithmétique

Prérequis : **Nombres premiers et décomposition en produit de facteurs premiers**
Objectifs :**Calcul du PPCM et du PGCD**

Compétences : **Modéliser** :*Comprendre et utiliser une simulation numérique ou géométrique. Traduire en langage mathématique une situation réelle*

Chercher :*S'engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler, expérimenter.*

Raisonner :*Mener collectivement une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui.*

Calculer : Nombres entier, nombre rationnel

Activité

1. Multiples, diviseurs, PPCM et PGCD

- En précisant le rôle de la chaine, expliquer pourquoi le pédalier et les engrenages ont des fonctionnements similaires.

Recherche sur le Vélector :

- On place un repère adhésif sur la roue arrière du vélo du Vélector à l'endroit le plus bas de la roue quand la pédale de gauche est verticale en bas.

- Dénombrer le nombre de dents de chaque pignon et du plateau du pédalier.

- Pour chaque vitesse, faire tourner le pédalier jusqu'à ce que le repère et les pédales soient de nouveau dans la même position

Dents pédalier						
Dents pignons						
Nombre de tours de pédale						
Nombre de tours de roue						

Recherche en classe :

En classe on pourra utiliser la modélisation des engrenages : https://www.geogebra.org/m/ZMGvBA9s, pour vérifier, ou simuler des comportements avec des nombres différents de la réalité

2. Multiples et diviseurs :

- **Si le nombre de dentsdu grand plateau est dans la table de multiplication du nombre de dents du petit pignon, la première fois que l'on retrouve la position de départ :**

1. Combien de tours a fait la pédale ? :

2. Quepeut-on dire du nombre de tours effectués par la roue arrière par rapport au nombre de dents du pignon et du pédalier ?

3. Qui est un multiple de qui ? Qui est un diviseur de qui ?

3. PPCM et PGCD :

- **En se servant des résultats du tableau complété sur le Vélector**

1) Vérifier dans chaque cas l'égalité :

Nombre de tours de roue x nombre de dents du pignon = nombre de tours de pédale x nombre de dents du plateau.

Dents pédalier						
Dents pignons						
Nombre de tours de pédale						
Nombre de tours de roue						
Dents pédalier						
Produit tours x dents pédale						
Produit tours x dents pignon						

En utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre de dents des pignons et du pédalier, retrouvez ce produit pour chaque vitesse. Comment s'appelle ce produit ?

2) Pour chaque vitesse : réduisez au maximum la fraction

$$\frac{nombre\ de\ dents\ du\ pédalier}{nombre\ de\ dents\ du\ pignon}$$

Par quel nombre avez-vous simplifié chaque fraction ?

Peut-on utiliser les décompositions en produits de facteurs premiers pour trouver ce nombre et comment ?

Comment s'appelle ce nombre ?

Justifier l'égalité : $\frac{nombre\ de\ dents\ du\ pédalier}{nombre\ de\ dents\ du\ pignon} = \frac{Nombre\ de\ tour\ de\ roue}{Nombre\ de\ tour\ de\ pédale}$

Bilan

1.Multiples et diviseurs

Définition :

On dit qu'un nombre entier A et un multiple de B s'il existe un entier C tel que :
A = B X C
Dans ce cas B et C sont des diviseurs de A

Utilisation de la décomposition en produit de facteurs premiers

Toute combinaison des facteurs premiers d'une décomposition en produit de facteurs premier d'un nombre donné est un diviseur de ce nombre.

Ex : 60=2^2x3x5 est divisible par 2, 3 , 5, 2X3, 2X5, 2x2, 4x5, 3x5, 4X5, 2x3x4, 2x3x5 et bien sur 2^2x3x5

Tout multiple d'un nombre donné contient dans la liste de ses facteurs premiers ceux de ses diviseurs.

Ex : 420 = 2^2x3^2x5x7 contient 60=2^2x3x5 qui le divise.

Remarque : L'ensemble des multiples d'un nombre s'étend à l'infini alors que l'ensemble des diviseurs est un ensemble de nombre entier compris entre 1 et lui-même, il est donc fini.

On pourra trouver l'ensemble des diviseurs d'un nombre en faisant toutes les combinaisons possibles de ses facteurs premiers :

Ex : $\boldsymbol{Div_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 20, 30, 60\}}$

2. PPCM et PGCD

Définition :
L'ensemble des multiples d'un nombre est infini, il possède néanmoins un élément plus petit que les autres : 1 x lui-même.

Les multiples de deux nombres A et B possèdent au moins un élément commun : AXB

- **Le plus petit commun diviseur des nombres A et B se nomme PPCM.**

Si ce PPCM est AXB alors les nombres sont premiers entres eux. (Ils n'ont de diviseurs communs).
Conséquence directe : la fraction $\frac{A}{B}$ est irréductible

Si ce PPCM est strictement plus petit que AXB alors ces nombres ne sont pas premiers entres eux.
Conséquence directe : la fraction $\frac{A}{B}$ est réductible.

***Remarque** : le PPCM de deux dénominateurs peut être utilisé comme dénominateur commun pour additionner deux fractions*

Ex : $\frac{1}{6}+\frac{1}{21}=\frac{7}{42}+\frac{2}{42}=\frac{9}{42}$ $\qquad \boldsymbol{PPCM(6,21)=42}$

Si deux nombres A et B admettent des diviseurs communs, ils ne sont pas premiers entre eux, et l'ensemble de leurs diviseurs communs possède un élément plus grand que les autres. (Les ensemble de diviseurs sont finis).

- **Le plus grand diviseur commun des deux nombres s'appelle le PGCD**

Si le PGCD de A et de B existe il permet, entre autres, de réduire au maximum la fraction $\frac{A}{B}$. La fraction obtenue est alors dite**« irréductible ».**

Ex : $\frac{315}{385}=\frac{3^2\text{x}5\text{x}7}{3\text{x}7^2\text{x}11}=\frac{15}{77}$ **15 et 77 sont premiers entre eux. PGCD(315, 385) = 21**

3.Méthode de calcul

A partir des décompositions en produit de facteurs premiers de deux nombres A et B.

- Le PGCD s'obtient en multipliant entres eux tous les facteurs communs aux deux nombres

  Ex : 315 et 385 :

  $$\mathbf{315 = 3x3x5x7, 385 = 3x7x7x11\ PGCD(315, 385) = 3x7 = 21}$$

- Le PPCM s'obtient en « unissant » les facteurs premiers des deux nombres

  Ex : $\mathbf{315 = 3x3x5x7, 385 = 3x7x7x11}$

  $$\mathbf{PPCM(315, 385) = 3x3x5x7x7x11 = 3465}$$